非線型特異1階偏微分方程式と有理形係数の形式解 (Resurgent Functionsと合成積方程式)

山根, 英司

数理解析研究所講究録
1088 巻 1999 年 79-82

非線型特異1階偏微分方程式と有理形係数の形式解

山根英司 (Hideshi Yamane)[1]

Abstract

次の形の偏微分方程式を考える：
$\big(tD_t-\rho(x)\big)u=ta(x)+G_2(x)(t,tD_tu,u,D_1u,\ldots,D_nu)$。
もし特性指数 $\rho(x)$ が $x=0$ の近傍で正整数値を取らないとすると,$u(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(x)t^m,\quad u_m(x)\in\mathcal{O}_{x=0}$ の形の形式解がただ一つ存在する。R.Gérard と田原秀敏の研究によると, これは $(t,x)=(0,0)$ の近傍で収束する。
この論説では, $x=0$ において $\rho(x)$ が正整数値を取る場合について調べる。この場合, $m\geq\rho(0)$ のとき $u_m(x)$ は有理形で, singular set は解析的集合 $\{x;\rho(x)=\rho(0)\}$, である。こうして有理形関数を係数とする形式解が得られるが, 筆者はその収束について調べた。方程式が「フックス型」であるだけに, 自然な結果が成り立つ。
この論説は [5] の解説であるが, [5] とは重点の置き方を変えてある。

1 例

$(t,x)\in\mathbf{C}^2$ において

$$\begin{cases}\{tD_t-(2-x^g)\}u(t,x)=t(x+1)(-1+x^g)+(D_xu)^2,\\ u(0,x)\equiv 0\end{cases}$$

について考察する。g は正整数とする。
$u(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(x)t^m$ とおいて $u_m(x)$ についての漸化式を立てる。

$$\begin{aligned}(-1+x^g)u_1(x)&=(x+1)(-1+x^g),\\ (m-2+x^g)u_m(x)&=\sum_{j+k=m}u_j'(x)u_k'(x)\quad(m\geq 2)\end{aligned}$$

である。
$0<|x|<1$ においては,各 $u_m(x)$ は正則となり, 形式解 $u(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(x)t^m$ が一意に存在する。R. Gérard と田原秀敏によれば, これは $t=0$ の近傍で収束して正則解を定める。
さて,$x=0$ の近傍での様子を調べよう。$u_1(x)=x+1$ はこの場合も正則である。次に

$$x^gu_2(x)=(u_1'(x))^2=1$$

より,$u_2(x)$ は $x=0$ で g 位の極を持つ。

$$(1+x^g)u_3(x)=2u_1'(x)u_2'(x)=\frac{-2g}{x^{g+1}}$$

[1] 275 千葉県習志野市芝園2-1-1 千葉工業大学数学教室　　yamane@cc.it-chiba.ac.jp
1991 Mathematics Subject Classifications: 35A20

であり,$u_3(x)$ は $g+1$ 位の極を持つ。

$$(2+x^g)u_4(x) = 2u_1'(x)u_3'(x) + \{u_2'(x)\}^2$$

であり,右辺第1項は $g+2$ 位の極を持ち,第2項は $2(g+1)$ 位の極を持つ。よって $u_4(x)$ は $2(g+1)$ 位の極を持つ。$u_3(x)$ に比べて,位数が急に増したことに注意しよう。非線型性が効いているのである。

このような考察を続けると, $m \geq 2$ のとき各 $u_m(x)$ は $x=0$ に極を持ち,その位数は, m が偶数のとき $g+\frac{g+2}{2}(m-2) = -2+\frac{g+2}{2}m$ であること, m が奇数のとき $-1-\frac{g+2}{2}+\frac{g+2}{2}m$ であることが分かる。つまり

$$\text{極の位数} \sim \frac{g+2}{2}m$$

である。

非常に大雑把に書くと

$$|u(t,x)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(\frac{t}{|x|^{\frac{g+2}{2}}}\right)^m$$

となる。

このことより, $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)t^m$ は $|t| < \mathrm{const}|x|^{\frac{g+2}{2}}$ で収束すると予想されるが, 実際これが正しいことを証明できる。

この結果は, ($\mathcal{O}$ 係数の) 形式解が収束する, という事実の一つの精密化といえる。

2　主結果

次のタイプの非線型特異1階偏微分方程式について調べる：

$$(tD_t - \rho(x))\,u = ta(x) + G_2(x)(t, tD_tu, u, D_1u, \ldots, D_nu)。\tag{1}$$

ここで $(t,x) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $D_t = \partial/\partial t$, $D_i = \partial/\partial x_i$。また, $\rho(x)$ と $a(x)$ は $\mathbf{C}_x^n$ の原点を中心とする多重円盤 D で定義された正則関数。また, G_2 は

$$G_2(x)(t,z,X_0,X_1,\ldots,X_n) = \sum_{p+q+|\alpha|\geq 2} a_{pq\alpha}(x)t^p z^q X_0^{\alpha_0}\cdots X_n^{\alpha_n},\ |\alpha| = \alpha_0+\cdots+\alpha_n,$$

の形の巾級数展開を持つとする。ここで $a_{pq\alpha}(x)$ は D で正則であり,
$\sum_{p+q+|\alpha|\geq 2} \sup_{x\in D} |a_{pq\alpha}(x)| t^p z^q X_0^{\alpha_0}\cdots X_n^{\alpha_n}$ は $(t,z,X_0,\ldots,X_n)$ の収束巾級数とする。

さて局所正則解 $u(t,x)$ であって,条件 $u(0,x)\equiv 0$ を満たすものを探そう。(1) の左辺はこの条件のおかげで well-defined になる。

次の定理は [1] で証明されている。

定理 1 (Gérard-田原) $\mathring{x} \neq 0$ を D の一つの点とする。もし $\rho(\mathring{x}) \notin \mathbf{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$ ならば, 方程式 (1) は $u(t,x) = \sum_{m\geq 1} u_m(x)t^m$, $u_m(x) \in \mathcal{O}_{x=0}$ の形の形式解をただ一つ持つ。さらにこれは $|t|$ が十分小さいとき収束して, $u(0,x)\equiv 0$ を満たす正則解 $u(t,x)$ を $(0,\mathring{x}) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$ の近傍で定める。

この定理を踏まえて, $\rho(\overset{\circ}{x})$ が正整数値を取る場合に何が起きるかを調べよう。

[1] の計算に倣う。 $\{u_m(x)\}$ について次が成り立つ：

$$u_1(x) = \frac{a(x)}{1-\rho(x)}, \tag{2}$$

であり, $m \geq 2$ のときは

$$\begin{aligned}
&\bigl(m-\rho(x)\bigr)u_m(x) \\
&= f_m\Bigl(u_1(x), 2u_2(x), \ldots (m-1)u_{m-1}(x), u_1(x), \ldots, u_{m-1}(x), \\
&\qquad D_1u_1, \ldots, D_nu_1, \ldots, D_1u_{m-1}, \ldots, D_nu_{m-1}, \{a_{pq\alpha}(x)\}_{p+q+|\alpha|\leq m}\Bigr)。
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで f_m は多項式で, どの係数も 1 である。

もし$\rho(\overset{\circ}{x}) \in \mathbf{N}^*$ ならば, generic にはある m に関して, $u_m(x)$ は $x = \overset{\circ}{x}$ で特異性を持つ。そうであれば, $(0, \overset{\circ}{x}) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$ のどんなに小さい近傍においても $u(0,x) \equiv 0$ を満たす正則解は存在しない。このような状況について調べようというのである。

次の仮定を置く：

$$\rho(0) \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}, \quad \rho(x) \not\equiv \rho(0)。 \tag{4}$$

この仮定のもとで, 集合 $V = \{\rho(x) = \rho(0)\} \subset \mathbf{C}_x^n$ は余次元 1 の解析的集合である。方程式(1) は V の外で $u(0,x) \equiv 0$ を満たす正則解をただ一つ持つが, V の点の近傍では generic にはそのような解は存在しない。

さて,

$$d(x) = \mathrm{dist}(x, V \cup \partial D) = \mathrm{dist}(x, V)$$

と置こう。ここで $\mathrm{dist}(x, Z)$ は x から $Z \subset \mathbf{C}_x^n$ までの距離を表わすものとする。 第2の等号は x が原点に十分近ければ成り立つ。

$\rho(x) - \rho(0)$ が $x = 0$ においてちょうど g 位のゼロを持つとすると, 次の評価が成り立つ：

$$\left|\frac{1}{\rho(x)-\rho(0)}\right| \leq C'd(x)^{-g}。 \tag{5}$$

ここで C' は正定数。

各 $u_m(x)$ は明らかに有理形で, 有理形係数の形式解が得られる。また, 次の形の評価が成り立つことは簡単に示せる：
原点の共通の近傍で,

$$|u_m(x)| \leq C_m d(x)^{-s_m} \quad (m \geq M)。 \tag{6}$$

ここで C_m は正定数であり, $s_m\,(m \geq M)$ は正整数である。明らかに $s_M = g$ と置いてよい。

命題 1 もし $M \geq g+2$ ならば$s_m = m + g - M \quad (m \geq M)$ としてよい。
もし $M < g+2$ ならば$s_{\ell M+k} = \ell(g+2) + k - 2 \quad (\ell \geq 1,\ 0 \leq k \leq M-1)$ としてよい。

つまり前者の場合, $s_m \sim m$, 後者の場合, $s_m \sim \dfrac{g+2}{M}$ となる。そのことから予想されるように, 次の結果が成り立つ。

定理 2 (主定理)
(i) もし $\rho(0) \geq g+2$ ならば, 有理形係数の形式解 $u(t,x) = \sum_{m\geq 1} u_m(x)t^m$ は

$$|t| < Cd(x), \quad x \text{ は原点に十分近い},$$

の形の領域で収束し, $u(0,x) \equiv 0$ を満たす正則解を定める。
(ii) もし $\rho(0) < g+2$ ならば, 有理形係数の形式解 $u(t,x) = \sum_{m\geq 1} u_m(x)t^m$ は

$$|t| < Cd(x)^{\frac{g+2}{\rho(0)}}, \quad x \text{ は原点に十分近い},$$

の形の領域で収束し, $u(0,x) \equiv 0$ を満たす正則解を定める。

どちらの場合でも C は $\rho(x)$, $a(x)$ と $G_2(t,z,X_0,X_1,\ldots,X_n)$ で定まる正定数である。

参考文献

[1] Gérard R. and Tahara H., Holomorphic and Singular Solutions of Nonlinear Singular First Order Partial Differential Equations, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **26**(1990), 979-1000.

[2] Gérard R. and Tahara H., *Singular Nonlinear Partial Differential Equations*, Vieweg, 1996.

[3] Hille E., *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley and Sons, 1976.

[4] Kimura T., *Ordinary differential equations*, Iwanami Shoten, 1977 (in Japanese).

[5] Yamane H., Nonlinear singular first order partial differential equations whose characteristic exponent takes a positive integral value, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **33(5)**(1997).

[6] Yamane H., Singularities in Fuchsian Cauchy Problems with holomorphic data, *to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.*